

2019~2020学年天津南开区天津市南开中学高二下学期期末数学试卷

一、选择题

(本大题共12小题,每小题4分,共48分)

1. $\frac{3-i}{2+i} = ()$.

A. $\frac{6}{5} - \frac{1}{5}i$

B. $\frac{6}{5} - i$

C. $1 + i$

D. $1 - i$

2. 下列求导运算正确的是().

A. $(e^{-x})' = e^{-x}$

B. $(\sin \alpha)' = \cos \alpha$ (α 为常数)

C. $(\cos x)' = \sin x$

D. $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$

3. $\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^5$ 展开式中的常数项为().

A. 80

B. -80

C. 40

D. -40

4. 一袋中装有5只白球,3只黄球,在有放回地摸球中,用 A_1 表示第一次摸得白球, A_2 表示第二次摸得白球,则事件 A_1 与 $\overline{A_2}$ 是().

A. 不相互独立事件

B. 相互独立事件

C. 互斥事件

D. 对立事件

5. 与曲线 $y = x^3 - 5x$ 相切且过原点的直线的斜率为().

A. 2

B. -5

C. -1

D. -2

6. 甲、乙两人独立地解同一问题,甲解出这个问题的概率 $\frac{1}{4}$,乙解出这个问题的概率是 $\frac{1}{2}$,那么甲、乙两人中至少有一人解出这个问题的概率是().

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{7}{8}$

D. $\frac{5}{8}$

7. 函数 $f(x) = x - \ln x$ 的递增区间为().

A. $(-\infty, 1)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(0, +\infty)$

8. 将1, 2, 3, 4四个数字排成一排,其中两个奇数相邻的概率为().

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{5}$

9. 若函数 $f(x) = x^3 + x^2 + mx + 1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,则实数 m 的取值范围是().

A. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

C. $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

10. $f(x)$ 是定义 $\mathbf{R}$ 上的可导函数,且满足 $xf'(x) + f(x) \leq 0$,对任意实数 a, b ,若 $a < b$,则必有().

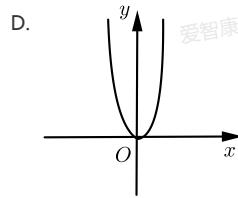
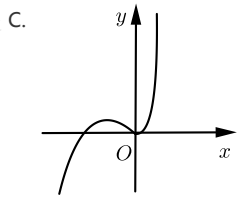
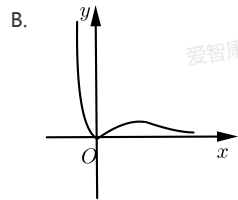
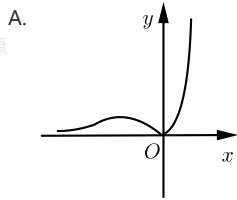
A. $af(b) \leq f(a)$

B. $bf(a) \leq f(b)$

C. $af(a) \leq bf(b)$

D. $bf(b) \leq af(a)$

11. 函数 $f(x) = \frac{x^2 e^x}{2}$ 的大致图象为().



12. 已知函数 $f(x) = xe^x - \ln x - x - 2$, $g(x) = \frac{e^{x-2}}{x} + \ln x - x$ 的最小值分别为 a, b , 则 ().

A. $a < b$

B. $a = b$

C. $a > b$

D. a, b 的大小关系不确定

二、填空题

(本大题共8小题, 每小题4分, 共32分)

13. 若复数 z 满足 $(1-i)z = 1+i$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的实部为 _____.

14. 如果 $\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为32, 则展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数是 _____.

15. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值之和为 _____.

16. 已知5件产品中有2件次品, 其余为合格品. 现从这5件产品中任取2件, 则恰有一件次品的概率为 _____.

17. 关于 x 的不等式 $x^2 \ln x - mx + x \geq 0$ 恒成立, 实数 m 的取值范围是 _____.

18. 已知函数 $f(x) = ax^2 + b \ln x$ 在 $x = 1$ 处有极值 $\frac{1}{2}$, 则 $a =$ _____; $b =$ _____.

19. 已知箱中装有10个不同的小球, 其中2个红球、3个黑球和5个白球, 现从该箱中有放回地依次取出3个小球, 则3个小球颜色互不相同的概率是 _____; 若变量 X 为取出3个球中红球的个数, 则 X 的数学期望 $E(X) =$ _____.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ex^2 + ax$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 对于任意的 $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, e\right]$, 存在 $x_2 \in \left[\frac{1}{2}, e\right]$, 使 $f'(x_1) \leq g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围为 _____; 若不等式 $f(x) + \frac{1}{6}x^3 < xg(x)$ 有且仅有一个整数解, 则实数 a 的取值范围为 _____.

三、解答题

(本大题共2小题, 每小题10分, 共20分)

21. 在某年级的联欢会上设计一根摸奖游戏, 在一个口袋中装有4个红球和4个白球, 这些球除颜色外完全相同, 一次从中摸出3个球, X 表示摸出红球的个数.

(1) 求 X 的分布列. (用数字作答)

(2) 至少摸到2个红球就中奖, 求中奖的概率. (用数字作答)

22. 三次函数 $f(x) = x^3 + ax + b + 1$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = -3x - 2$.

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值 .

(3) 若 $x \in [-2, 3]$ 时 , 不等式 $f(x) \leq m^2 - 6m$ 恒成立 , 求 m 的取值范围 .